Daniela Stoica

Matematică

BACALAUREAT – TESTE

M2 TEHNOLOGIC

– ediție revizuită –

Booklet
București, 2024

Variantă de subiecte și bareme pentru Bacalaureatul de Matematică M2 Tehnologic - 2024

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Arătați că $3 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 4$.

5p 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 6$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x + 1) = \log_7 9$.

5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 23\}$, acesta să verifice inegalitatea $n \geq 10$.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(1,6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p 6. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC = \sqrt{2}$ și $BC = 2$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Arătați că $\det A = -1$.

5p b) Arătați că $2B - A = 3C$.

5p c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $2X \cdot A = B + 2C$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$.

5p a) Arătați că $5 * 4 = 4$.

5p b) Determinați numărul real x pentru care $x * 6 = 6x$.

5p c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\frac{4}{n} * n > 4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 9$.

5p a) Arătați că $f'(x) = 3(x^2 + 4x - 5)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p c) Arătați că $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{e^x f''(x)} = 0$.

2. Se consideră funcția $f : (-9, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{8x}{x + 9}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 (x + 9) f(x) dx = 4$.

5p b) Arătați că $\int_1^6 \frac{1}{8x} f(x) dx = \ln\frac{3}{2}$.

5p c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^3 f(x^2) dx = 6(4 + a\pi)$.

Barem de evaluare şi notare

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=3\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=$ $=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4.$	**3p** **2p**
2.	$f(a)=a+2$ $a+2=6$, de unde obținem $a=4$	**2p** **3p**
3.	$2x+1=9$ $x=4$, care convine	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 14 numere n care verifică inegalitatea $n\geq 10$, deci sunt 14 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{14}{23}$	**2p** **3p**
5.	$x_M=\frac{-1+1}{2}=0$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB $y_M=\frac{2+6}{2}=4$	**3p** **2p**
6.	$AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{2}$ $AB=AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-2\cdot 2=$ $=3-4=-1$	**3p** **2p**
b)	$2B-A=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}3 & 6\\ 6 & 3\end{pmatrix}=$ $=3\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=3C$	**3p** **2p**
c)	$B+2C=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $X=\frac{1}{2}(B+2C)\cdot A^{-1}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}9 & -14\\ 0 & 2\end{pmatrix}$	**3p** **2p**
2.a)	$5*4=(5-4)(4-4)+4=$ $=1\cdot 0+4=4$	**3p** **2p**

b)	$x * 6 = 2x - 4$, pentru orice număr real x $2x - 4 = 6x$, de unde obținem $x = -1$	**3p** **2p**
c)	$\left(\frac{4}{n} - 4\right)(n-4) + 4 > 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n} - 1\right)(n-4) > 0$, unde n este număr natural nenul Cum n este număr natural nenul, obținem $n = 2$ și $n = 3$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 3x^2 + 6 \cdot 2x - 15 =$ $= 3x^2 + 12x - 15 = 3(x^2 + 4x - 5)$, $x \in \mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$ sau $x = 1$ $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -5]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty, -5]$, $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [-5, 1]$, deci f este descrescătoare pe $[-5, 1]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	**2p** **3p**
c)	$f''(x) = 3(2x+4)$, $x \in \mathbb{R}$, deci $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{e^x f''(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{e^x(2x+4)} =$ $= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+4}{e^x(2x+6)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x(2x+8)} = 0.$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1 (x+9) f(x) dx = \int_0^1 8x\,dx \Big\|_0^1 =$ $= 4 - 0 = 4$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^6 \frac{1}{8x} f(x) dx = \int_1^6 \frac{1}{x+9} dx = \int_1^6 \frac{(x+9)'}{x+9} dx = \ln(x+9) \Big\|_1^6 =$ $= \ln 15 - \ln 10 = \ln \frac{3}{2}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^3 f(x^2)\,dx = \int_0^3 \frac{8x^2}{x^2+9} dx = 8\int_0^3 \left(1 - \frac{9}{x^2+9}\right) dx = 8x \Big\|_0^3 - 8 \cdot \frac{9}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} \Big\|_0^3 =$ $= 24 - 6\pi = 6(4 + a\pi)$, de unde obținem $a = -1$	**3p** **2p**

Subiectul și baremul pentru Bacalaureatul de Matematică M2 Tehnologic - 2024

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\frac{12}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) = 6$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x + 1} = 3$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90\}$, acesta să fie divizibil cu 20.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 0)$ și $B(8, 8)$ și $C(11, 4)$. Arătați că $AB = 2BC$.

5p **6.** Arătați că $1 + \sin 30° = 2\sin 60° \cdot \cos 30°$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 2$.

5p **b)** Arătați că $A(2) + A(0) = 2A(1)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x) + xI_2 = 2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2(x + y) - xy - 4$.

5p **a)** Arătați că $1 \circ 3 = 1$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n \circ n \geq n - 2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{2(1 - x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x^2 + x + 1)f(x)dx = 2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx = \ln 3$.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^x(x^2 + x + 1)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ are aria egală cu $e + 1$.

Barem de evaluare și notare

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)=$ $=\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{6}=2$	**2p** **3p**
2.	$f(a)=5a+1$, pentru orice număr real a $5a+1=6$, de unde obținem $a=1$	**2p** **3p**
3.	$4x+1=9$, de unde obținem $4x=8$ $x=2$, care convine	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 9 de elemente, deci sunt 9 de cazuri posibile Numerele din mulțimea A, care sunt divizibile cu 20 sunt 20, 40, 60 și 80, deci sunt 4 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{4}{9}$	**2p** **3p**
5.	$BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$ $AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$, deci $AB=2BC$	**2p** **3p**
6.	$\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\sin 60°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $1+\sin 30°=1+1/2=3/2$, $2\sin 60°\cdot\cos 30°=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0\\-2&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&0\\-2&2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-2)\cdot 0=$ $=2-0=2$	**3p** **2p**
b)	$A(2)+A(0)=\begin{pmatrix}2&1\\-4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\-4&4\end{pmatrix}=$ $2\begin{pmatrix}1&0\\-2&2\end{pmatrix}=2A(1)$	**3p** **2p**
c)	$A(x)+xI_2=\begin{pmatrix}x&x-1\\-2x&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&x-1\\-2x&2+x\end{pmatrix}$ și $\det(A(x)+xI_2)=4x^2+2x$, pentru orice număr real x $4x^2+2x-2=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=\frac{1}{2}$	**3p** **2p**

2.a)	$1 \circ 3 = 2(1 + 3) - 1 \cdot 3 - 4 =$ $= 8 - 3 - 4 = 1$	3p 2p
b)	$y \circ x = 2(y + x) - yx - 4 =$ $= 2(x + y) - xy - 4 = x \circ y$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	2p 3p
c)	$n \circ n = 4n - n^2 - 4$, pentru orice număr natural n $4n - n^2 - 4 \geq n - 2 \Leftrightarrow -n^2 + 3n - 2 \geq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 1$ și $n = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{(2x-1)' \cdot x^2 - (2x-1)(x^2)'}{x^4} = \dfrac{2x^2 - 2x(2x-1)}{x^4} =$ $= \dfrac{-2x^2 + 2x}{x^4} = \dfrac{2(1-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(1) = 1, f'(1) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = 1$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0, 1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, 1]$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1, +\infty)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + x + 1) f(x)dx = \int_0^1 (x^2 + x + 1) \cdot \dfrac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 (2x + 1)dx = (x^2 + x)\Big\|_0^1 =$ $= 1 + 1 - 0 - 0 = 2$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \dfrac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx = \int_0^1 \dfrac{(x^2 + x + 1)'}{x^2 + x + 1} dx = \ln(x^2 + x + 1)\Big\|_0^1 =$ $= \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$	3p 2p
c)	$g(x) = e^x(2x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$, deci $\mathcal{A} = \int_0^1 \|g(x)\|dx = \int_0^1 e^x(2x + 1)dx =$ $= e^x(2x + 1)\big\|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx =$ $= e^x(2x + 1)\big\|_0^1 - 2e^x\big\|_0^1 = 3e - 1 - 2e + 2 = e + 1$	3p 2p

Enunțuri

Varianta 1

Subiectul I (30 de puncte)

1. Arătați că numărul $n = \sqrt{27} - 3(2 + \sqrt{3})$ este număr întreg.

2. Determinați punctul de intersecție a graficelor funcțiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 6x$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - 4$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^x - 18 = 0$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie multiplu al lui 5.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-2, 4)$ și $N(4, -6)$. Determinați ecuația dreptei MN.

6. Arătați că $\sin^2 30° + \cos^2 45° + \cos^2 60° = 1$

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^2 = O_2$.

b) Arătați că matricea $I_2 - 2A$ este inversa matricei $I_2 + 2A$.

c) Determinați numărul real x pentru care $\det(A - xI_2) = 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - x + 3y + 2$.

a) Arătați că $1 * (-2) = -9$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $(-2) * x \leq 5$.

c) Determinați numărul natural n pentru care $2^n * 2 = 32$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln x - x + 1$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-x}{x}, x \in (0, \infty)$.

b) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x + 2$.

a) Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 4$.

b) Calculați $\int_{0}^{1} e^x \cdot f(x)dx$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\int_{0}^{a-1} f(x)dx = \int_{1}^{a+1} (f(x) - 3)dx$.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Varianta 2

Subiectul I (30 de puncte)

1. Arătați că $12 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + 2 = 4$.

2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 7x - 8$ cu axa Ox.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(3x^2 - 15x - 15) = 1$.

4. Calculați în câte moduri poate fi aleasă o echipă formată din 3 elevi din totalul celor 7 elevi pe care îi are la dispoziție un antrenor.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-3, 9)$, $N(6, -15)$ și P. Determinați coordonatele punctului P știind că punctul N este simetricul punctului P față de punctul M.

6. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $C = \frac{\pi}{4}$ și $AC = 8$. Calculați aria triunghiului ABC.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Verificați că $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

b) Calculați $(A + B)^2$.

c) Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A + xB) = -5$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = -xy + x + 4y - 3$.

a) Arătați că $2 * 1 = 1$.

b) Determinați numărul real nenul x pentru care $\frac{1}{x} * x = 0$.

c) Determinați numerele naturale n pentru care $n * n \geq 1$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{e^x} + x$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

b) Arătaţi că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$.

c) Arătaţi că funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x\ln x$.

a) Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\ln x} dx = 6$.

b) Demonstraţi că funcţia $F:(0, \infty) \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2(2\ln x - 1) + 2$ este o primitivă a funcţiei f.

c) Calculaţi $\int_1^e F(x)f(x)dx$, unde F este o primitivă a funcţiei f.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Varianta 3

Subiectul I (30 de puncte)

1. Arătați că $\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 1 = 1$.

2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 15x + 12$ cu axa Oy.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x = \sqrt{6x - 9}$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 6.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 2)$ și $B(2, 3)$. Determinați distanța de la punctul A la punctul B.

6. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $B = 30^\circ$ și $BC = 12$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x+2 \\ x-2 & -1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $A(2) + A(4) = 2A(3)$.

b) Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 2$.

c) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(x) = A(x)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy + 5x + 5y + 20$.

a) Arătați că $(-5) \circ (-4) \circ 0 \circ 1 \circ 2 = -5$.

b) Demonstrați că $x \circ \frac{1}{x} \geq 11$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

c) Determinați numerele întregi n pentru care $(n + 1) \circ (n - 1) = 10$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Arătați că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x \in (0, \infty)$.

b) Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta $-y + 2 = 0$.

c) Arătați că $f(x) \leq \frac{1}{e}$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

2. Se considera funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$ și $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2$.

a) Demonstrați că funcția F este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_0^1 F(x)dx$.

c) Arătați că $\int_2^3 \frac{1}{x^3 - f(x)} dx = \frac{1}{2}$.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**